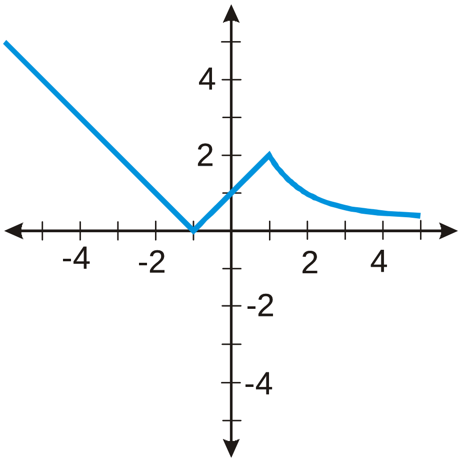
2.4.12 Kreslení graf obecné funkce I

Předpoklady: 2402, 2403

Pedagogická poznámka: Metoda kreslení grafů, která je popisována v této hodině se podstatně liší od standardního postupu (spočívajícího v sepsání pravidel, která popisují, kdy se co kam posune). Při používání této metody si tato pravidla pamatovat nemusíte a jste schopni nakreslit poměrně snadno i grafy poměrně složitých funkcí, na druhou stranu musíte řešit příklad postupně, dobře rozumět prioritám početních operací a hlavně přemýšlet. Důkladné porozumění hodinám 2402 a 2403 je pro pochopení této hodiny naprostou nezbytností.

Pedagogická poznámka: V závislosti na tom, jak hluboko pochopili studenti hodiny 2402 a 2403 dochází k rozštěpení třídy na dvě části. Někdy až 80% dokáže nakreslit bez jakékoliv pomoci všechno (včetně příkladů z Petákové), zbytek potom postupuje pomaleji a ne vždy se dostane až příkladu 10 (což zas až tak nevadí).
Zřejmě největším problém při pochopení metody je, aby studenti dobře rozuměli tomu, že zápis $f(x)$ znamená *y*-vou hodnotu bodů grafu.

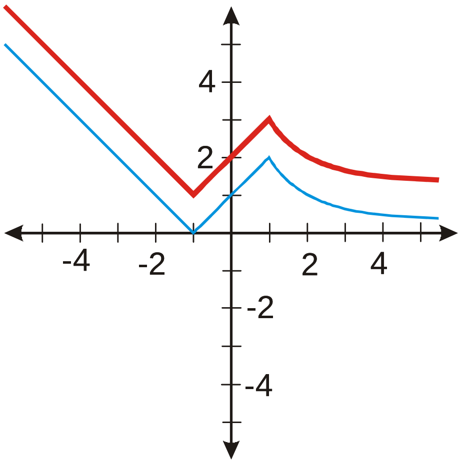
Je dána funkce $y = f(x)$ grafem na obrázku:



Funkce je sestavena z částí lineárních funkcí a části funkce $y = \frac{2}{x}$. Příliš nás to nezajímá, stačí nám několik funkčních hodnot jako $f(-2) = 1$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, hodnoty funkce se pro velká *x* blíží nule.
Pomocí tohoto obrázku dokážeme nakreslit grafy mnoha dalších funkcí.

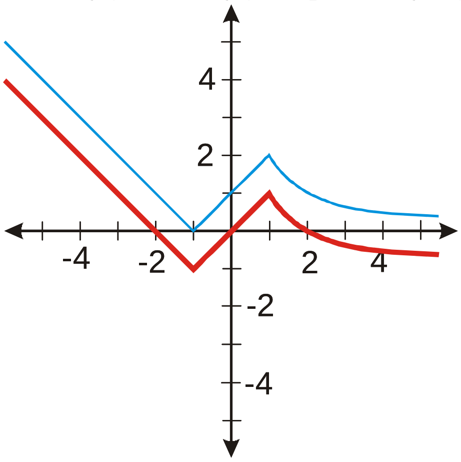
Př. 1: Nakresli graf funkce $y = f(x) + 1$.

Funkční hodnoty funkce $y = f(x) + 1$ jsou pro stejná *x* vždy o jednu větší než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ graf funkce $y = f(x) + 1$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou posunuty o jednu výš (hodnoty jsou o jednu větší).



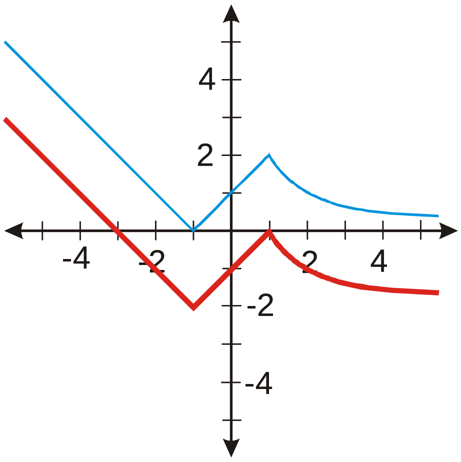
Př. 2: Nakresli graf funkce $y = f(x) - 1$.

Funkční hodnoty funkce $y = f(x) - 1$ jsou pro stejná x vždy o jednu menší než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ grafu funkce $y = f(x) - 1$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou posunuty o jednu níže (hodnoty jsou o jednu menší).



Př. 3: Nakresli graf funkce $y = f(x) - 2$.

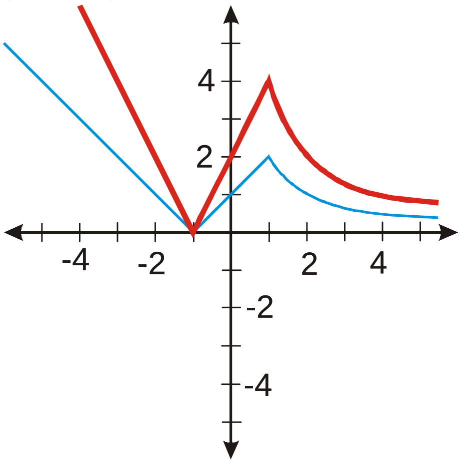
Funkční hodnoty funkce $y = f(x) - 2$ jsou pro stejná x vždy o dvě menší než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ grafu funkce $y = f(x) - 2$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou posunuty o dvě níže (hodnoty jsou o dvě menší).



Pedagogická poznámka: Pokud někdo kreslí pomalu, ať příklad 3 přeskočí a pracuje rovnou na 4.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = 2f(x)$.

Funkční hodnoty funkce $y = 2f(x)$ jsou pro stejná *x* vždy dvakrát větší než hodnoty funkce $y = f(x) \Rightarrow$ grafu funkce $y = 2f(x)$ je podobný grafu funkce $y = f(x)$ jen všechny jeho body jsou dvakrát dále od osy *x* (hodnoty jsou o dvakrát větší), body s hodnotou 0 se nezmění ($2 \cdot 0 = 0$), body s hodnotou 1 se posunou tak, aby jejich *y*-vá souřadnice měla hodnotu 2 ($2 \cdot 1 = 2$) atd.



Pedagogická poznámka: Často je potřeba studenty upozornit, že konečná funkce má sice hodnoty dvojnásobné než $f(x)$, ale i přesto se pro velká *x* blíží k nule.

U dalších příkladů je potřeba pečlivě dodržovat posloupnost operací.

Př. 5: Nakresli graf funkce $y = -\frac{1}{2} f(x)$.

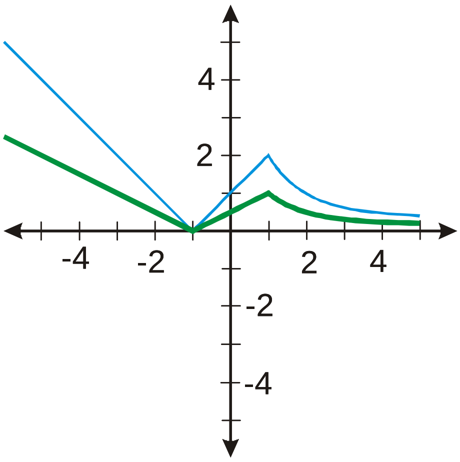
Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

Nakreslíme funkci $y = f(x)$ - nejdříve spočteme hodnotu funkce

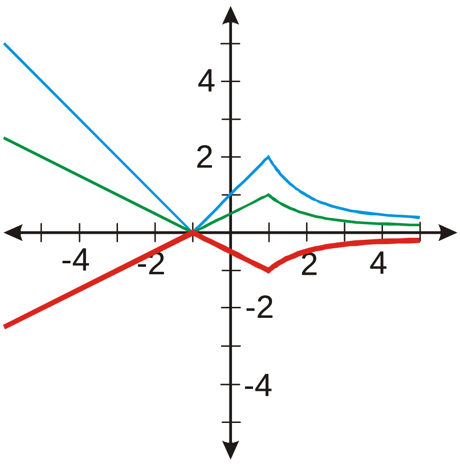
Nakreslíme funkci $y=\frac{1}{2}f(x)$ - získané hodnoty vynásobíme číslem $\frac{1}{2}$

Nakreslíme funkci $y=-\frac{1}{2}f(x)$ - získané hodnoty násobíme -1

Funkční hodnoty funkce $y=\frac{1}{2}f(x)$ jsou pro stejná *x* vždy poloviční než hodnoty funkce $y=f(x)\Rightarrow$ grafu funkce $y=2f(x)$ je podobný grafu funkce $y=f(x)$ jen všechny jeho body jsou v poloviční vzdálenosti od osy *x* (hodnoty jsou o poloviční), body s hodnotou 0 se nezmění ($\frac{1}{2}\cdot 0=0$), body s hodnotou 1 se posunou tak, aby jejich *y*-vá souřadnice měla hodnotu $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$) atd.



Funkční hodnoty funkce $y=-\frac{1}{2}f(x)$ jsou pro stejná *x* opačná k hodnotám funkce $y=\frac{1}{2}f(x)\Rightarrow$ každý bod grafu funkce $y=\frac{1}{2}f(x)$ se zobrazí v osové souměrnosti podle osy *x* (hodnotě se změní znaménko), body s hodnotou 0 se nezmění ($-0=0$), body s hodnotou 1 se zobrazí tak, aby jejich *y*-vá souřadnice měla hodnotu -1 ($(-1)\cdot 1=-1$) atd.



Př. 6: Nakresli graf funkce $y=\left|f(x)-1\right|$.

Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

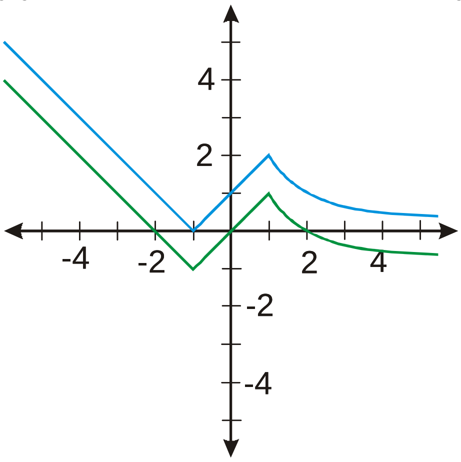
Nakreslíme funkci $y = f(x)$

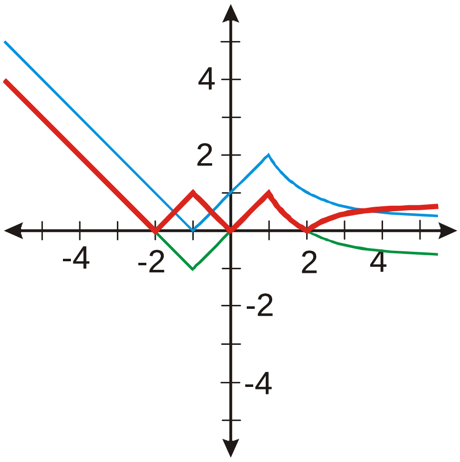
Nakreslíme funkci $y = f(x) - 1$

Nakreslíme funkci $y = \left| f(x) - 1 \right|$

Každý graf získáme upravením předchozího, způsobem, který zachycuje výpočet, který do předpisu funkce přibyl.

Funkční hodnoty funkce $y = \left| f(x) - 1 \right|$ jsou pro stejná *x* stejné jako hodnoty funkce $y = f(x) - 1$ pokud jsou kladné. Pokud jsou záporné (pod osou *x*), absolutní hodnota změní jejich znaménko – osově souměrně je zobrazí nad osu *x*.





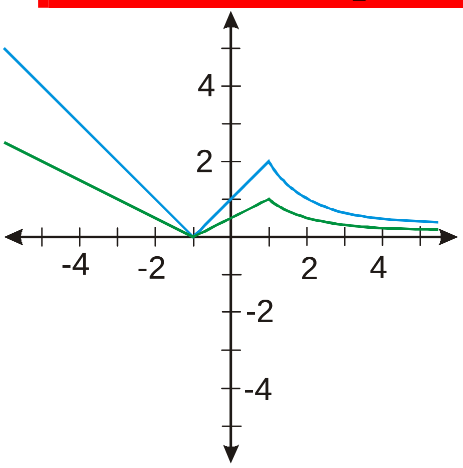
Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \frac{1}{2} f(x) + 1$.

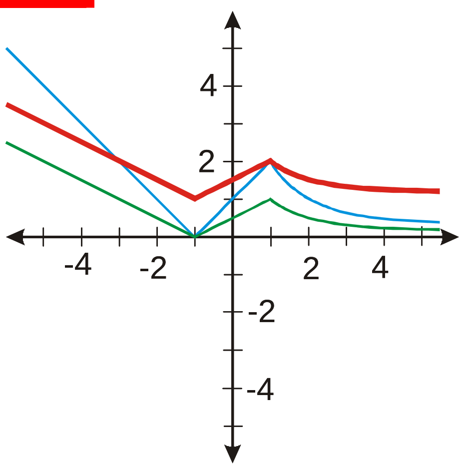
Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

Nakreslíme funkci $y = f(x)$

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(x)$

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(x) + 1$



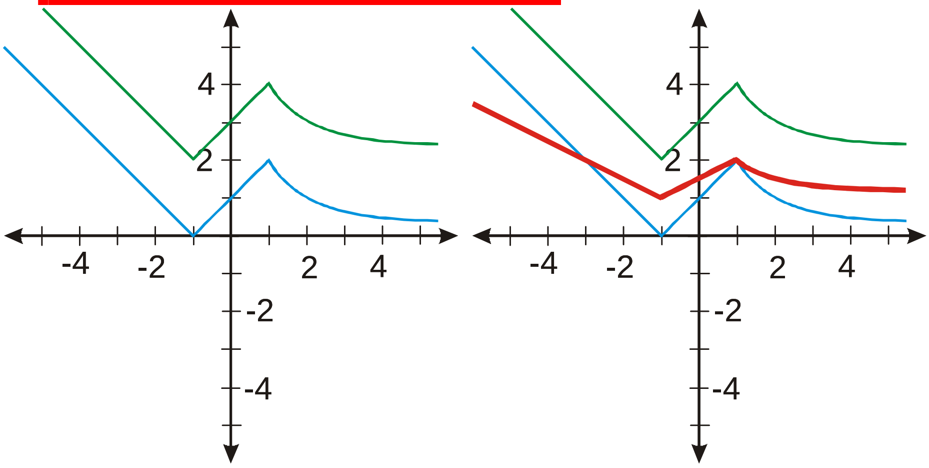


Př. 8: Nakresli graf funkce $y=\frac{1}{2}\left[2+f\left(x\right)\right]$.

Vypadá to, že $f\left(x\right)$ není na začátku, ale stačí přepsat výraz v závorce: $y=\frac{1}{2}\left[f\left(x\right)+2\right]$

Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

Nakreslíme funkci $y=f\left(x\right)$
Nakreslíme funkci $y=f\left(x\right)+2$
Nakreslíme funkci $y=\frac{1}{2}\left[f\left(x\right)+2\right]$



Př. 9: Porovnej výsledky příkladu 7 a 8. Zdůvodni.

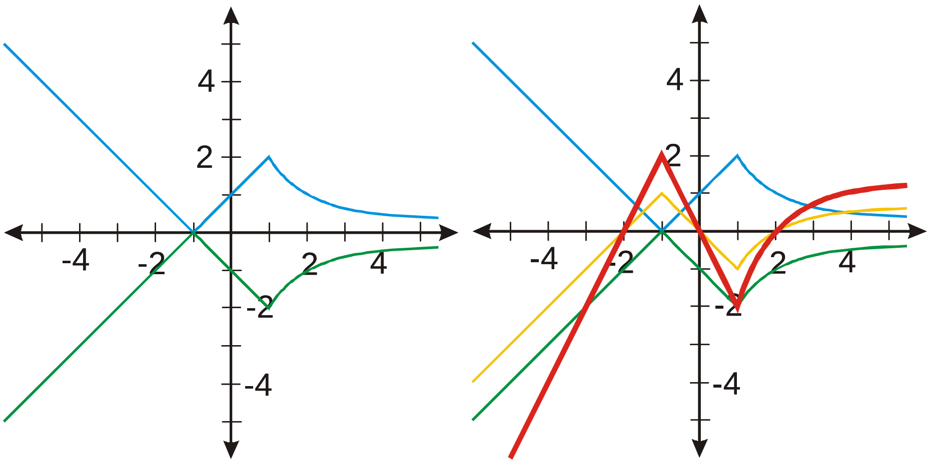
Výsledky obou příkladů jsou stejné, což vyplývá přímo z úpravy předpisu funkce
$y=\frac{1}{2}\left[f\left(x\right)+2\right]=\frac{1}{2}f\left(x\right)+1$

Př. 10: Nakresli graf funkce $y=2\left[1-f\left(x\right)\right]$.

Vypadá to, že $f\left(x\right)$ není na začátku, ale stačí přepsat výraz v závorce: $y=2\left[-f\left(x\right)+1\right]$

Budeme postupovat po krocích jako při výpočtu:

Nakreslíme funkci $y=f\left(x\right)$
Nakreslíme funkci $y=-f\left(x\right)$
Nakreslíme funkci $y=-f\left(x\right)+1$
Nakreslíme funkci $y=2\left[-f\left(x\right)+1\right]$



Př. 11: Petáková:
strana 27/cvičení 29 a) d) e) f) h)

Shrnutí: Grafy odvozených funkcí můžeme nakreslit i v případě, že původní funkce nemá jednoduché vyjádření. Stačí sledovat výpočet funkční hodnoty a provádět odpovídající úpravy na grafu původní funkce.